UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

MSS 212 / MSS 312 – ALJABAR LINEAR LANJUTAN

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** [4] soalan di dalam **LIMA** [5] halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) Biar $E = \{(x, 2x+1) | x \in \mathbb{R}\}$. E adalah subset $\mathbb{R}^2$. Adakah E subruang linear $\mathbb{R}^2$?

(ii) Biar V suatu ruang vektor dan $S, T \subset V$. Andai $\mathcal{L}(S) \subset \mathcal{L}(T)$. Adakah $S \subset T$?

(iii) Biar V suatu ruang vektor dan $F \subset V$. Tunjukkan bahawa $F = \mathcal{L}(F)$ jika hanya jika F adalah subruang linear V.

[30 markah]

(b) Biar M dan N subset-subset dari $\mathbb{R}^2$ tertakrif seperti berikut :

$$M = \{(a,0) | a \in \mathbb{R}\} \ , \qquad N = \{(0,b) | a \in \mathbb{R}\}$$

(i) Tunjukkan bahawa M dan N adalah subruang linear $\mathbb{R}^2$.

(ii) Beri takrif bagi subruang linear $M \cap N$ dan $M + N$.

(iii) Jika $V = M + N$, adakah $V = M \oplus N$?

[30 markah]

(c) Diberi $E = \{x^2, 1 + x^2\}$ adalah suatu subset dalam $P_2(\mathbb{R})$.

(i) Apakah takrif subruang linear yang direntang oleh E iaitu $\mathcal{L}(E)$?

(ii) Mengapakah $\mathcal{L}(E) \neq P_2(\mathbb{R})$?

(iii) Cari suatu polinomial $p(x)$ dalam $P_2(\mathbb{R})$ yang tidak berada dalam $\mathcal{L}(E)$ dan tunjukkan bahawa $E \cup \{p(x)\}$ adalah tak bersandar linear.

(iv) Adakah $E \cup \{p(x)\}$ asas bagi $P_2(\mathbb{R})$?

[30 markah]

(d) Andai U adalah subruang linear dari suatu ruang vektor berdimensi terhingga (finite-dimensional) V. Tunjukkan bahawa $U = V$ jika hanya jika dim U = dim V.

[10 markah]

2. (a) (i) Tunjukkan bahawa $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang ditakrifkan dengan $T(x,y)=(2x-y,\ x)$ ialah suatu transtormasi linear.

(ii) Tunjukkan bahawa $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ yang ditakrifkan dengan $T(x,y,z)=(x+y+z,1)$ ialah <u>bukan</u> suatu transformasi linear.

[15 markah]

(b) (i) Diberi $T:V \to W$ suatu transformasi linear. Andai M adalah subruang linear V dan $T(M)=\{T(\mathrm{A})\in W \mid \mathrm{A}\in M\}$. Tunjukkan bahawa $T(M)$ adalah subruang linear W.

(ii) Diberi $T:V \to W$ suatu transformasi linear. Buktikan bahawa jika V berdimensi terhingga, maka dim $V=$ dim Im T + dim Ker T.

[30 markah]

(c) Biar $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suatu transformasi linear yang ditakrifkan dengan $T(x,y)=(x+3y,3x+y)$. Cari matriks perwakilan T relatif kepada :

(i) asas piawai ('standard') $\mathbb{R}^2$.

(ii) asas $\{F_1=(1,1),\ F_2=(1,-1)\}$ digunakan dua kali.

(iii) asas $\{F_1,F_2\}$ dalam domain dan asas piawai dalam julat.

[20 markah]

(d) (i) Biar $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suatu transformasi linear yang ditakrifkan dengan : $T(x,y,z)=x-3y+2z$. Cari asas bagi Ker T. Apakah dim Ker T dan dim Im T ?

(ii) Biar $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suatu transformasi linear dengan matriks perwakilan relatif kepada asas $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ adalah

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Diberi set asas $S=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,2)\}$. Cari matriks pertukaran asas P relatif kepada pasangan asas S, E. Kemudian dapatkan matriks B sedemikian hingga $B=P^{-1}AP$.

[35 markah]

3. (a) Diberi data-data berikut :

t	t_1	t_2	t_3	$\cdots$	t_4
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_4

Masalah untuk mencari suatu fungsi linear $y = ct + d$ yang paling memadankan data-data yang diberi adalah setara dengan masalah mencari nilai c dan d yang meminimakan $E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ct_i - d)^2$. Biar

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \text{ Maka jelasnya } E = \|y - Ax\|^2$$

dengan R^m sebagai ruang Euklidan berdimensi m.

Keputusan di bahagian (i) menunjukkan wujudnya $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sedemikian hingga $\|y - Ax_0\| \le \|y - Ax\|$ bagi semua $x \in \mathbb{R}^2$.

(i) *Biar $A \in M_{m\times 2}$ dan $y \in \mathbb{R}^m$. Maka wujud suatu $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sedemikian hingga $(A^t A)x_0 = A^t y$ dan $\| y - Ax_0\| \le \| y - Ax\|$ bagi semua $x \in \mathbb{R}^2$. Tambahan lagi jika pangkat A sama dengan 2 (iaitu $r(A) = 2$), maka $x_0 = (A^t A)^{-1} A^t y$.*

Buktikan keputusan ini.

(ii) Dalam fizik, Hukum Hooke mengatakan wujudnya suatu hubungan linear antara pemanjangan t suatu spring terhadap daya y yang dikenakan ke atasnya, iaitu $y = ct + d$ di mana c dinamakan sebagai pemalar spring. Gunakan data-data berikut untuk menganggarkan nilai pemalar c dan d.

t(cm)	3.5	4.0	4.5	5.0
y(N)	1.0	2.2	2.8	4.3

(b) Cari penyelesaian minima bagi sistem persamaan yang berikut :

$$x + 2y - z = 1$$
$$2x + 3y + z = 2$$
$$4x + 7y - z = 4$$

[100 markah]

4. Biar $W=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0+2a_1+3a_2=0\}$, suatu subruang linear kepada ruang hasil darab terkedalam $P_2(\mathbb{R})$ di mana $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

(i) Cari suatu asas ortonormal bagi W.

(ii) Cari $W^{\perp}=\{p(x)\in P_2(\mathbb{R}) \mid \langle p(x), q(x)\rangle = 0 \text{ bagi semua } q(x)\in W\}$

(iii) Cari suatu asas ortonormal bagi $W^{\perp}$.

(iv) Tuliskan satu asas ortonormal bagi $P_2(\mathbb{R})$ dengan bantuan jawapan di bahagian (i) dan (iii).

(v) Tunjukkan $P_2(\mathbb{R})$ adalah berisometri dengan $\mathbb{R}^3$ dengan bantuan asas ortonormal yang didapati di bahagian (iv).

[100 markah]

-ooo000ooo-